KATALOG POŽADAVKŮ PRO ZKOUŠKU ZE STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY

MATEMATIKA+

Úvod

Účel a obsah katalogu

Katalog požadavků zkoušky ze středoškolské matematiky vymezuje rozsah požadavků na vědomosti a dovednosti žáků, kteří mají zájem tuto zkoušku konat; vychází z rámcových a školních vzdělávacích programů pro gymnázia a z rámcových a školních vzdělávacích programů těch oborů středního vzdělávání ukončených maturitní zkouškou, které respektují požadavky vysokých škol matematického, přírodovědného a technického zaměření na úroveň vědomostí a dovedností uchazečů o studium.
Součástí katalogu je i rámcová specifikace povolených pomůcek respektující základní princip srovnatelnosti podmínek zkoušky.

Pedagogické dokumenty ke katalogu

Katalog byl připravován v souladu s platnými pedagogickými dokumenty**.** Katalogem vymezené požadavky zkoušky Matematika+ mohou svým obsahem přesáhnout minimální požadavky vymezené v rámcových vzdělávacích programech oborů středního vzdělávání ukončených maturitní zkouškou. Tímto vymezením však v žádném směru neomezují právo žáků oborů středního vzdělávání s maturitní zkouškou přihlásit se ke zkoušce.

Jako podpůrné prameny byly využity publikované standardy a didaktické materiály:
FUCHS, E., BINTEROVÁ, H. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborná učiliště.** Praha: Prometheus, 2003, ISBN 80–7196–294–5.
FUCHS, E., KUBÁT, J. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia.** Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80–7196–095–0.
FUCHS, E., PROCHÁZKA, F. a kol. **Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy.** Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80–7196–097–7.
Nedílnou součástí katalogu požadavku je příloha s ukázkami testových úloh.

Požadavky na znalosti a dovednosti, které mohou být ověřovány v rámci zkoušky Matematika+

Očekávané znalosti a dovednosti pro zkoušku Matematika+ jsou v první části specifikovány v pěti hlavních kategoriích kompetencí, které je v rámci rozsahu a možností vzdělávacího programu žádoucí rozvíjet v průběhu středního vzdělávání v oborech vzdělání ukončených maturitní zkouškou.

A – Kompetence

Osvojení matematických pojmů a dovedností

Žák dovede:

- užívat správně matematické pojmy (definovat pojmy a určit jejich obsah, charakterizovat pojem různými způsoby, třídit pojmy a nalézat vztahy mezi nimi, zobecňovat pojmy a vztahy mezi nimi);
- numericky počítat a užívat proměnnou (provádět základní početní operace, odhadnout výsledek výpočtu, využít efektivní způsoby výpočtu, upravit výrazy s čísly a proměnnými, stanovit definiční obor výrazu, na základě reálné situace sestavit výraz s proměnnými);
- pracovat s rovinnými a prostorovými útvary (rozpoznat a pojmenovat geometrické útvary, využívat geometrickou představivost při analýze rovinných a prostorových vztahů, měřit a odhadovat výsledek měření, řešit početně geometrickou úlohu, řešit konstrukčně geometrickou úlohu);
- matematicky argumentovat (používat různé typy tvrzení, rozlišit definici a větu, rozumět logické stavbě matematické věty, dokázat jednoduchou matematickou větu, vytvořit a ověřit hypotézu, zdůvodnit ji, nebo vyvrátit).

Matematické modelování

Žák dovede:

- matematizovat reálné situace (odhalit kvantitativní nebo prostorové vztahy a zákonitosti, vytvořit matematický model reálné situace);
- pracovat s matematickým modelem;
- ověřit vytvořený model z hlediska reálné situace (vyjádřit výsledek řešení modelu v kontextu reálné situace, vyhodnotit výsledek modelované situace);
- kombinovat různé modely téže situace.

Vymezení a řešení problému

Žák dovede:

- vymezit problém;
- analyzovat problém;
- zvolit vhodnou metodu řešení problému (popsat problém vzorcem, užít známý algoritmus, vytvořit algoritmus řešení);
- vyřešit problém;
- diskutovat o výsledcích;
- aplikovat osvojené metody řešení problémů v jiných tématech a oblastech.

Komunikace

Žák dovede:

- číst s porozuměním matematický text;
- vyhodnotit informace kvantitativního i kvalitativního charakteru obsažené v grafech, diagramech, tabulkách atd.;
- přesně se vyjádřit (užívat jazyk matematiky včetně symboliky a terminologie, zdůvodnit matematické tvrzení, obhájit vlastní řešení problému, prezentovat výsledky řešení úlohy a prezentovat geometrické konstrukce na dobré grafické úrovni);
- prezentovat získané informace a výsledky (zpracovat získané údaje formou grafů, diagramů, tabulek atd., použít různé formy znázornění matematických situací).

Užití pomůcek

Žák dovede:

- využít informační zdroje (odborná literatura, internet atd.);
- efektivně řešit problémy pomocí kalkulátoru a PC;
- použít kalkulátor a PC k prezentaci řešení problémů;
- použít tradiční prostředky grafického vyjadřování.

B – Tematické okruhy

Druhá část požadavků pro zkoušku Matematika+ obsahuje konkrétní znalosti a dovednosti z jednotlivých tematických okruhů.

1 Číselné obory

Žák dovede:

1.1 Přirozená čísla

- provádět aritmetické operace s přirozenými čísly;
- rozlišit prvočíslo a číslo složené, rozložit přirozené číslo na prvočinitele;
- určit největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek přirozených čísel;
- rozlišit čísla soudělná a nesoudělná;
- užít pojem dělitelnost přirozených čísel a znaky dělitelnosti;
- užít dělitelnost v důkazu;

1.2 Celá čísla

- provádět aritmetické operace s celými čísly;
- užít pojem opačné číslo;

1.3 Racionální čísla

- pracovat s různými tvary zápisu racionálního čísla a s jejich převody;
- provádět operace se zlomky;
- provádět operace s desetinnými čísly včetně zaokrouhlování, určit řád čísla;
- řešit úlohy na procenta, zlomky a poměr a užívat trojčlenku;
- znázornit racionální číslo na číselné ose;

1.4 Reálná čísla

- zařadit číslo do příslušného číselného oboru;
- provádět aritmetické operace v číselných oborech;
- užít pojmy opačné číslo a převrácené číslo;
- znázornit reálné číslo nebo jeho aproximaci na číselné ose;
- určit absolutní hodnotu reálného čísla a chápat její geometrický význam;
- zapisovat a znázorňovat množiny a intervaly, jejich průnik, sjednocení, rozdíl a doplněk;
- provádět operace s mocninami s celočíselným exponentem;
- užít mocninu s racionálním exponentem a ovládat početní výkony s mocninami a odmocninami;
- řešit úlohy s mocninami a odmocninami;

1.5 Komplexní čísla

- užít Gaussovu rovinu k zobrazení komplexních čísel;
- vyjádřit komplexní číslo v algebraickém i goniometrickém tvaru;
- vypočítat absolutní hodnotu a argument komplexního čísla a chápat jejich geometrický význam;
- určit a znázornit číslo opačné, číslo komplexně sdružené;
- sčítat, odčítat, násobit a dělit komplexní čísla v algebraickém tvaru, určit převrácené číslo;
- násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru užitím Moivreovy věty;
- užít při řešení rovnic rovnost komplexních čísel;
- řešit binomické rovnice.

2 Algebraické výrazy

Žák dovede:

2.1 Algebraický výraz

- určit hodnotu výrazu;
- určit nulový bod výrazu;
- stanovit definiční obor výrazu;
- provádět operace s výrazy;
- sestavit výraz;

2.2 Mnohočleny

- užít pojmy člen, koeficient, stupeň mnohočlenu;
- provádět operace s mnohočleny, provádět umocnění dvojčlenu pomocí vzorců;
- rozložit mnohočlen na součin užitím vzorců a vytýkáním;

2.3 Lomené výrazy

- provádět operace s lomenými výrazy;
- stanovit definiční obor lomeného výrazu;

2.4 Výrazy s mocninami a odmocninami

- provádět operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny;

2.5 Výrazy s absolutní hodnotou

- provádět operace s výrazy obsahujícími absolutní hodnotu.

3 Rovnice a nerovnice

Žák dovede:

3.1 Rovnice a nerovnice

- stanovit definiční obor rovnice a nerovnice;
- užít ekvivalentních a důsledkových úprav při řešení rovnice a nerovnice, provádět zkoušku;
- vyjádřit neznámou ze vzorce;
- sestavit rovnici, nerovnici;
- užít rovnice a nerovnice při řešení slovní úlohy;

3.2 Lineární rovnice a jejich soustavy, rovnice s neznámou ve jmenovateli

- řešit lineární rovnice o jedné neznámé a rovnice s neznámou ve jmenovateli;
- řešit rovnice obsahující výrazy s neznámou v absolutní hodnotě;
- řešit rovnice s parametrem;
- řešit početně i graficky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých;
- řešit soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých;
- řešit lineární rovnice v oboru komplexních čísel;

3.3 Kvadratické rovnice

- řešit neúplné i úplné kvadratické rovnice;
- užít vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice;
- řešit kvadratické rovnice s parametrem;
- řešit soustavy lineární a kvadratické rovnice o dvou neznámých;
- řešit soustavy kvadratických rovnic o dvou neznámých;
- řešit kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v oboru komplexních čísel;

3.4 Rovnice s neznámou pod odmocninou

- řešit rovnice s neznámou pod odmocninou, při řešení rovnic rozlišit ekvivalentní a neekvivalentní úpravy;

3.5 Lineární a kvadratické nerovnice a jejich soustavy

- řešit lineární nerovnice s jednou neznámou a jejich soustavy;
- řešit rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru;
- řešit nerovnice obsahující lineární výrazy s neznámou v absolutní hodnotě;
- řešit početně i graficky kvadratické nerovnice.

4 Funkce

Žák dovede:

4.1 Základní poznatky o funkcích

- užít různá zadání funkce v množině reálných čísel a užít s porozuměním pojmy definiční obor, obor hodnot, argument funkce, hodnota funkce, graf funkce;
- určit průsečíky grafu funkce s osami soustavy souřadnic a průsečíky grafů funkcí;
- sestrojit graf funkce dané předpisem $y = f(x)$ nebo část grafu pro hodnoty proměnné x z dané množiny, určit hodnoty proměnné x pro dané hodnoty funkce f;
- vytvořit předpis funkce $y = f(x)$ ke grafu elementární funkce;
- rozhodnout, zda je funkce sudá, lichá, prostá, omezená, periodická, určit intervaly monotonie a body, v nichž funkce nabývá lokálních a globálních extrémů;
- sestrojit z grafu funkce $y = f(x)$ grafy funkcí $y = a \cdot f(bx + c) + d$; $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$;

- určit funkci inverzní k dané funkci, sestrojit její graf, užít poznatky o složené funkci;
- modelovat reálné závislosti pomocí funkcí;
- užívat výrazy s elementárními funkcemi a určit definiční obor těchto výrazů;

4.2 Lineární funkce

- užít pojem a vlastnosti přímé úměrnosti;
- určit lineární funkci, sestrojit její graf;
- využívat geometrický význam parametrů a, b v předpisu funkce $y = ax + b$;
- určit předpis lineární funkce z daných bodů nebo grafu funkce;
- sestrojit graf lineární funkce s absolutními hodnotami a určit vlastnosti funkce;
- řešit reálné problémy pomocí lineární funkce;

4.3 Kvadratické funkce

- určit kvadratickou funkci, vysvětlit význam parametrů v předpisu kvadratické funkce, upravit předpis funkce, sestrojit graf;
- stanovit definiční obor a obor hodnot funkce, najít bod, v němž nabývá funkce extrému, určit intervaly monotonie;
- sestrojit graf kvadratické funkce s absolutními hodnotami a určit její vlastnosti;
- řešit reálné problémy pomocí kvadratické funkce;

4.4 Mocninné funkce

- určit mocninnou funkci s celočíselným exponentem, funkci druhá a třetí odmocnina, sestrojit grafy těchto funkcí;
- stanovit definiční obor a obor hodnot, určit intervaly monotonie;

4.5 Lineární lomená funkce

- užít pojem a vlastnosti nepřímé úměrnosti;
- určit lineární lomenou funkci, upravit předpis funkce, určit asymptoty, sestrojit graf lineární lomené funkce;
- stanovit definiční obor a obor hodnot lineární lomené funkce, určit intervaly monotonie;
- sestrojit graf lineární lomené funkce s absolutními hodnotami a určit její vlastnosti;
- řešit reálné problémy pomocí lineární lomené funkce;

4.6 Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice

- určit exponenciální funkci a sestrojit její graf;
- užívat s porozuměním pojmu inverzní funkce pro definování logaritmické funkce, určit logaritmickou funkci a sestrojit její graf;
- stanovit definiční obor a obor hodnot u obou funkcí, určit typ monotonie v závislosti na hodnotě základu;
- řešit exponenciální a logaritmické rovnice a jednoduché nerovnice, užít logaritmus a jeho vlastnosti;
- aplikovat poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích při řešení reálných problémů;

4.7 Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

- užít pojem orientovaný úhel a jeho hodnoty v míře stupňové a obloukové;
- definovat goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku;
- definovat goniometrické funkce v oboru reálných čísel, užít jednotkové kružnice;
- sestrojit grafy goniometrických funkcí $y = f(x)$ a grafy funkcí $y = a \cdot f(bx + c) + d$, určit jejich definiční obor, obor hodnot, užít jejich dalších vlastností;
- užít vztahy mezi goniometrickými funkcemi;

- řešit goniometrické rovnice a jednoduché nerovnice;
- aplikovat poznatky o goniometrických funkcích při řešení reálných problémů.

5 Posloupnosti a řady, finanční matematika

Žák dovede:

5.1 Základní poznatky o posloupnostech

- aplikovat znalosti o funkcích a jejich vlastnostech při řešení úloh o posloupnostech;
- určit posloupnost vzorcem pro n–tý člen, rekurentně, graficky;

5.2 Aritmetická posloupnost

- určit aritmetickou posloupnost, používat definici aritmetické posloupnosti a pojem diference;
- užít základní vzorce pro aritmetickou posloupnost;

5.3 Geometrická posloupnost

- určit geometrickou posloupnost, používat definici geometrické posloupnosti a pojem kvocient;
- užít základní vzorce pro geometrickou posloupnost;

5.4 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada

- užít s porozuměním pojmy vlastní a nevlastní limita posloupnosti, konvergentní a divergentní posloupnost;
- užít věty o limitách posloupnosti k výpočtu limity posloupnosti;
- určit podmínky konvergence nekonečné geometrické řady a vypočítat její součet;

5.5 Využití posloupností a řad pro řešení úloh z praxe

- využít poznatků o posloupnostech a řadách v reálných situacích, v úlohách finanční matematiky a v dalších úlohách.

6 Planimetrie

Žák dovede:

6.1 Planimetrické pojmy a poznatky

- užít pojmy bod, přímka, polopřímka, rovina, polorovina, úsečka, úhly (vedlejší, vrcholové, střídavé, souhlasné, středové a obvodové), znázornit objekty;
- užít s porozuměním polohové a metrické vztahy mezi geometrickými útvary v rovině (rovnoběžnost, kolmost a odchylka přímek, délka úsečky a velikost úhlu, vzdálenosti bodů a přímek);
- rozlišit konvexní a nekonvexní útvary, popsat a správně užívat jejich vlastnosti;
- při řešení početních a konstrukčních úloh využívat množiny všech bodů dané vlastnosti;

6.2 Trojúhelníky

- pojmenovat základní objekty v trojúhelníku, správně užít jejich vlastnosti, s porozuměním užít pojmy (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, výšky, těžnice, střední příčky, kružnice opsaná a vepsaná);
- při řešení úloh argumentovat s využitím poznatků vět o shodnosti a podobnosti trojúhelníků;
- aplikovat poznatky o trojúhelnících (obvod, obsah, výška, Pythagorova a Euklidovy věty, poznatky o těžnicích a těžišti) v úlohách početní geometrie;
- aplikovat poznatky o trojúhelnících v úlohách konstrukční geometrie;
- řešit úlohy užitím trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku;

6.3 Mnohoúhelníky

- rozlišit základní druhy čtyřúhelníků, (různoběžníky, rovnoběžníky, lichoběžníky), mnohoúhelníky včetně pravidelných mnohoúhelníků, popsat je a správně užít jejich vlastnosti;
- pojmenovat, znázornit a správně užít základní objekty ve čtyřúhelníku (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, kružnice opsaná a vepsaná, úhlopříčky, výšky), popsat a užít vlastnosti konvexních mnohoúhelníků;
- aplikovat poznatky o čtyřúhelnících (obvod, obsah, vlastnosti úhlopříček a kružnice opsaná nebo vepsaná) a mnohoúhelnících v úlohách početní geometrie;
- využít poznatků o mnohoúhelnících v úlohách konstrukční geometrie;

6.4 Kružnice a kruh

- pojmenovat, znázornit a správně užít základní objekty v kružnici a kruhu, popsat a užít jejich vlastnosti (tětiva, kružnicový oblouk, kruhová výseč a úseč, mezikruží);
- užít polohové vztahy mezi body, přímkami a kružnicemi;
- aplikovat metrické poznatky o kružnicích a kruzích (obvod, obsah, velikost obvodového a středového úhlu) v úlohách početní geometrie;
- aplikovat poznatky o kružnici a kruhu v úlohách konstrukční geometrie;

6.5 Geometrická zobrazení

- popsat a určit shodná zobrazení (souměrnosti, posunutí, otočení) a užít jejich vlastnosti;
- popsat a určit stejnolehlost nebo podobnost útvarů a užít jejich vlastnosti;
- aplikovat poznatky o shodnosti a podobnosti v úlohách konstrukční geometrie.

7 Stereometrie

Žák dovede:

7.1 Polohové vlastnosti útvarů v prostoru

- určit vzájemnou polohu bodů, přímek, přímky a roviny, rovin;
- rozhodnout o kolmosti nebo rovnoběžnosti přímek a rovin;
- zobrazit jednoduchá tělesa ve volném rovnoběžném promítání;
- konstruovat rovinné řezy hranolu a jehlanu;
- konstruovat průsečnici dvou rovin v hranolu;

7.2 Metrické vlastnosti útvarů v prostoru

- určit vzdálenost dvou bodů, bodu od přímky a roviny, rovnoběžných přímek a rovin;
- určit odchylku dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin;

7.3 Tělesa

- charakterizovat jednotlivá tělesa, vypočítat jejich objem a povrch (krychle, kvádr, hranol, jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý jehlan a kužel, koule a její části);
- využít poznatků o tělesech v praktických úlohách.

8 Analytická geometrie

Žák dovede:

8.1 Souřadnice bodu a vektoru v rovině i prostoru

- určit vzdálenost dvou bodů a souřadnice středu úsečky;
- užít pojmy vektor a jeho umístění, souřadnice vektoru a velikost vektoru;
- provádět operace s vektory (součet vektorů, násobek vektoru reálným číslem, skalární a vektorový součin vektorů);
- určit velikost úhlu dvou vektorů;

8.2 Přímka a rovina

- užít parametrické vyjádření přímky a jejích částí v rovině a prostoru, obecnou rovnici přímky a směrnicový tvar rovnice přímky v rovině;
- užít parametrické vyjádření roviny a obecnou rovnici roviny;
- určit a aplikovat v úlohách polohové a metrické vztahy bodů, přímek a rovin;

8.3 Kuželosečky

- charakterizovat jednotlivé druhy kuželoseček, užít jejich vlastnosti;
- užít analytické vyjádření kuželoseček;
- určit vzájemnou polohu přímky a kuželosečky;
- určit vzájemnou polohu dvou kuželoseček.

9 Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Žák dovede:

9.1 Kombinatorika

- užít základní kombinatorická pravidla (kombinatorické pravidlo součinu, kombinatorické pravidlo součtu);
- rozpoznat kombinatorické skupiny (variace s opakováním, variace, permutace a kombinace bez opakování), určit jejich počty a užít je v reálných situacích;
- počítat s faktoriály a kombinačními čísly;
- užít binomickou větu a Pascalův trojúhelník při řešení úloh;

9.2 Pravděpodobnost

- užít pojmy náhodný jev, jistý jev, nemožný jev, opačný jev, nezávislost jevů, sjednocení a průnik jevů;
- určit pravděpodobnost náhodného jevu, vypočítat pravděpodobnost sjednocení nebo průniku jevů;

9.3 Statistika

- vysvětlit a užít pojmy statistický soubor, rozsah souboru, statistická jednotka, statistický znak, hodnota znaku, četnost a relativní četnost;
- vypočítat četnost a relativní četnost hodnoty znaku, sestavit tabulku četností, graficky znázornit rozdělení četností;
- určit charakteristiky polohy a variability (průměry, modus, medián, percentil, rozptyl, směrodatná odchylka);
- vyhledat a vyhodnotit statistická data v grafech a tabulkách.

C – Základní specifikace zkoušky Matematika+

Zkouška má formu didaktického testu tvořeného různými typy uzavřených testových úloh (s jednou správnou odpovědí) včetně jejich svazků, otevřenými úlohami se stručnou odpovědí a otevřenými úlohami se širokou odpovědí. Testové úlohy mají různou bodovou hodnotu, která je uvedena u každé úlohy v testu.
V průběhu didaktického testu mohou mít žáci k dispozici Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, kalkulátor (bez grafického režimu, řešení rovnic a úprav algebraických výrazů) a rýsovací potřeby.[1]
V následující tabulce je uvedeno orientační procentuální zastoupení skupin požadavků (tematických okruhů) v didaktickém testu v rámci samostatné zkoušky:

Tematické okruhy	Zastoupené v testu (v %)
1. Číselné množiny	4–10
2. Algebraické výrazy	4–14
3. Rovnice a nerovnice	10–20
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a řady, finanční matematika	4–14
6. Planimetrie	10–18
7. Stereometrie	4–14
8. Analytická geometrie	8–18
9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	4–14

D – Příklady testových úloh

Testové úlohy jsou uvedeny jen jako samostatné ukázky, jejich zastoupení necharakterizuje strukturu testu. Soubor ukázek proto nelze považovat za sestavený test.

[1] Součástí vymezení požadavků je i rámcová specifikace povolených pomůcek. Podrobnější vymezení rozsahu a struktury povolených pomůcek stanoví metodické pokyny Centra.

Příklady testových úloh

Testové úlohy jsou uvedeny jako samostatné ukázky, jejich zastoupení necharakterizuje strukturu testu. Soubor ukázek nelze považovat za sestavený test. V ukázkách úloh je správné řešení uvedeno vždy za úlohou.

1. Číselné množiny

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Na divadelní představení byly zakoupeny dva druhy vstupenek celkem za 1 500 Kč. Levnějších vstupenek po 48 Kč se koupilo o pět méně než dražších vstupenek po 68 Kč.

(CERMAT)

1 Vypočtěte, kolik vstupenek každého druhu bylo zakoupeno.

Řešení: 10 levnějších a 15 dražších

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Výnosy z vkladů jsou sníženy vždy o 15% daň. Vklad ve výši 55 000 Kč vynesl za rok čistý úrok 935 Kč. (Čistý úrok je částka z úroku po odečtení daně.)

(CERMAT)

2 Vypočítejte roční úrokovou míru. Výsledek zaokrouhlete na desetiny procenta.

Řešení: 2,0 %

---

3 Vypočítejte a výsledek zapište jako mocninu s racionálním exponentem:

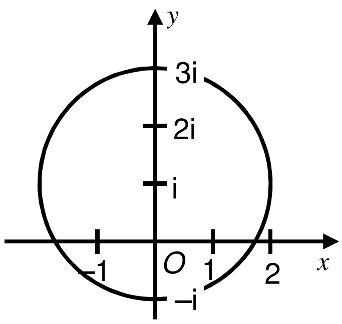
$$\frac{\left(15^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \frac{\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{27}}}$$

Řešení: $\mathbf{3^{-\frac{19}{4}}}$

4 **V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro která je**

$|z - i| = 2.$

Řešení:



---

5 **Který výsledek mocnění $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^5$ je správný?**

A) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

C) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

D) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

E) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

Řešení: D

2. Algebraické výrazy

1 Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí:

$(x^2+1)(x-a)+2 = x^3+3x^2+x+b$

Určete hodnoty parametrů a, b.

Řešení: $a = -3, b = 5$

---

2 **Pro $x \in \mathbf{R}$ určete definiční obor výrazu a výraz upravte.**

$$\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2}$$

Řešení: $\mathbf{R}\backslash\{-1; 2\}$; $x+2$

---

3 **Užitím rozkladu na součin určete nulové body mnohočlenu $x^5-3x^3+8x^2-24$ s proměnnou $x \in \mathbf{R}$.**

Uveďte postup řešení.

Řešení:

$$x^5-3x^3+8x^2-24 = x^3(x^2-3)+8(x^2-3) = (x^3+8)(x^2-3) =$$

$$= (x+2)(x^2-2x+4)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) = 0$$

Trojčlen x^2-2x+4 nelze v oboru $\mathbf{R}$ rozložit.

$\underline{\underline{x_1 = -2;\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = \sqrt{3}}}$

---

4 Pro $x, y \in \mathbf{R}^+$ platí:

$$\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x+y} : \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

Která z úprav je správná?

A) $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{xy}$

B) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}$

C) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

D) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$

E) jiný výraz

Řešení: B

5 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (5.1–5.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

		A	N
5.1	Pro libovolná dvě reálná čísla a, b platí $\lvert a-b \rvert = \lvert b-a \rvert$.	☐	☐
5.2	Pro libovolné reálné číslo a platí $\sqrt{(a-3)^2} = a-3$.	☐	☐
5.3	Pro každá dvě nezáporná čísla a, b platí $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.	☐	☐
5.4	Pro každá dvě nezáporná čísla a, b platí $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.	☐	☐

Řešení: ANO, NE, NE, ANO

3. Rovnice a nerovnice

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Na cestě mezi městy A a C leží město B. Vzdálenost měst A a B je 10 km a vzdálenost měst B a C je 50 km. Z měst A a B vyjeli současně dva cyklisté směrem k městu C. Rychlost cyklisty vyjíždějícího z města A byla 25 km.h^{-1}, rychlost cyklisty vyjíždějícího z města B 20 km.h^{-1}.

(CERMAT)

1 **Ve které vzdálenosti od města C dohonil první cyklista druhého?**

A) 20 km před městem C

B) 10 km před městem C

C) 0 km

D) 10 km za městem C

E) v jiné vzdálenosti

Řešení: B

---

2 **V oboru $\mathbf{R}$ řešte:**

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=4$$

Řešení: $x_1 = 9;\ x_2 = 4$

---

3 **V oboru $\mathbf{R}$ řešte:**

$$x^2+4x-8<|x+2|$$

Řešení: $(-6; 2)$

---

4 Kvadratická rovnice $x^2-2x(1+m)+3m+7=0$ s neznámou $x \in \mathbf{C}$ má reálný parametr m.

Pro které hodnoty parametru $m \in \mathbf{R}$ má rovnice imaginární kořeny?

A) $m \in \langle -2; 3\rangle$

B) $m \in (-\infty;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$

C) $m \in \{-2; 3\}$

D) $m \in (-2; 3)$

E) $m \in (-3; 2)$

Řešení: D

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Slečna Hermína disponuje částkou 8 500 korun, rozhodla se tedy navštívit velký svět financí. Zaujal ji plakát firmy „MOULA & spol.“, v němž stálo:

Naše firma zhodnotí Vaše peníze! Za 100 dnů si splníte své sny!

Za jednorázovou investici v hodnotě 10 000 korun a více garantujeme 6% zisk za 100 dnů.

Dokonce i investice pod 10 000 korun Vám přinese za 100 dnů 3% zisk.

Chybí Vám peníze? Půjčíme Vám až 10 000 korun na 100 dnů!

Teprve až uplyne celých 100 dnů, zaplatíte 15% úrok z půjčené částky.

Hermína využije nabídku firmy na 100 dnů a zvažuje i možnost půjčky.
Předpokládejme, že firma dostojí svým slibům.

(CERMAT)

5

5.1 Vypočtěte zisk Hermíny, pokud si žádné peníze nepůjčí a investuje jen částku 8 500 korun.

5.2 Vypočtěte, o kolik korun se zvýší Hermínin zisk, pokud si chybějící peníze od firmy půjčí a investuje 10 000 korun.

5.3 Pokud by měla Hermína o něco menší částku než 8 500 korun, investice 10 000 korun zatížená půjčkou by se jí mohla stále ještě vyplatit. Naopak pro nízké částky je výhodnější investice bez půjčky.

Vypočtěte, pro jakou částku přinášejí obě možnosti stejný zisk (tj. investice bez půjčky nebo investice 10 000 korun zatížená půjčkou).

Uveďte postup řešení.

Řešení:

5.1 3% zisk z 8 500 korun:
$0{,}03 \cdot 8\,500 = 255$ (korun)

Zisk Hermíny je 255 korun.

5.2 Zisk z 10 000 korun je 6 %, tj. 600 korun.
Za půjčenou částku 1 500 korun (= 10 000 – 8 500) se zaplatí 15 %, tj. 225 korun, tedy čistý zisk bude 375 korun, což představuje částku o 120 korun vyšší než v předchozím případě.

Zisk se zvýší o 120 Kč.

5.3 Neznámá $x \geq 0$ představuje částku v korunách, kterou je možné investovat.

Uvažujme $x < 10\,000$ korun (je možná přímá investice s 3% ziskem nebo investice s půjčkou) a dále předpokládejme, že půjčka zvýší investovanou částku právě na 10 000 korun.

1. Zisk z investice samotné částky x (bez půjčky): $z_1 = 0{,}03x$
2. Zisk z investice zatížené půjčkou dorovnávající částku x na 10 000 korun: $z_2 = 10\,000 \cdot 0{,}06 - (10\,000 - x) \cdot 0{,}15$

Pro $z_1 = z_2$ platí:

$0{,}03x = 10\,000 \cdot 0{,}06 - (10\,000 - x) \cdot 0{,}15$

$3x = 60\,000 - 150\,000 + 15x$

$12x = 90\,000$

$x = 7\,500$

Zkouška:

1. Přímá investice: $z_1 = 0{,}03 \cdot 7\,500 = 225$ (korun).
2. Investice s půjčkou: $z_2 = 600 - 2\,500 \cdot 0{,}15 = 225$ (korun).

Pro částku 7500 korun přinášejí obě možnosti stejný zisk.

Poznámka: Části 5.1 a 5.2. lze zařadit do tematického okruhu „Číselné množiny“.

4. Funkce

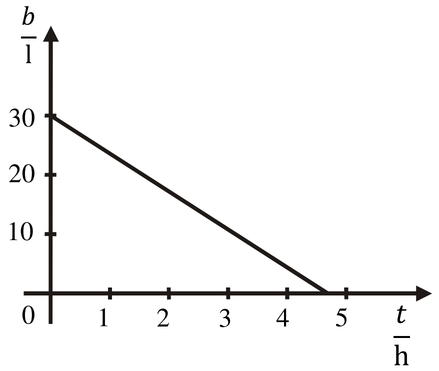
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Automobil má na počátku jízdy 30 litrů benzinu v nádrži. Jede stálou rychlostí 80 km.h^{-1}. Při této rychlosti je průměrná spotřeba benzinu 8 litrů na 100 km.
Objem benzinu v nádrži b (v litrech) je lineární funkcí doby jízdy auta t (v hodinách).

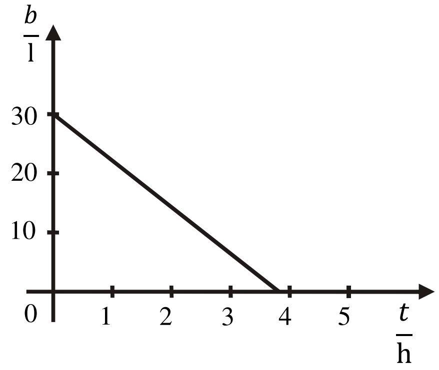
(CERMAT)

1 Který z grafů by mohl znázorňovat tuto lineární funkci?

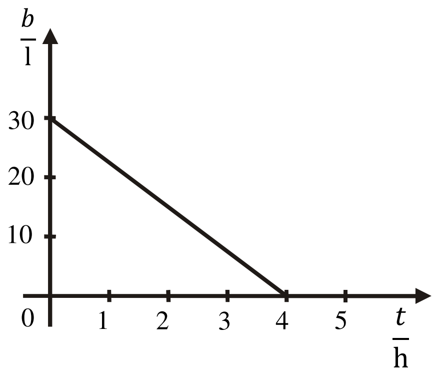
A)



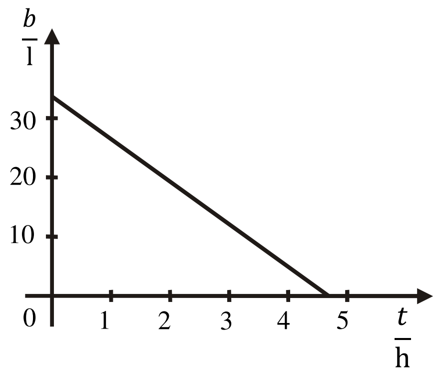
B)



C)



D)



E) žádný z uvedených grafů

Řešení: A

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Teplota se měří v Celsiových nebo Fahrenheitových stupních. Hodnoty f naměřené ve Fahrenheitových stupních jsou lineární funkcí hodnot c naměřených v Celsiových stupních. Přitom naměřené hodnotě 8 °C odpovídá 46,4 °F a naměřené hodnotě 24 °C odpovídá 75,2 °F.

(CERMAT)

2 Převeďte na Fahrenheitovy stupně naměřenou hodnotu 20 °C.

Řešení: 68,0 °F

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Závislost hmotnosti m radioaktivní látky na čase t při její radioaktivní přeměně je dána vzorcem $m = m_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$, kde m_0 značí počáteční hmotnost látky v čase $t = 0$ a T je tzv. poločas přeměny (doba, za kterou se m_0 zmenší na polovinu). Poločas přeměny radionuklidu jodu $^{131}\mathrm{I}$ je 8 dní.

(CERMAT)

3 Jaká je hmotnost zbylého radionuklidu za 5 dní, jestliže $m_0 = 0{,}1$ g?

A) 0,65 g

B) 65 mg

C) 6,5 mg

D) 0,65 mg

E) 0,065 mg

Řešení: B

---

4 Řešte následující nerovnice v daných oborech a výsledek zapište intervalem.

4.1 $3 - x \geq -3$ pro $x \in \langle -10; 10 \rangle$

4.2 $x^2 \leq x$ pro $x \in \mathbf{R}$

4.3 $\log_3 x \geq 0$ pro $x \in \mathbf{R}$

4.4 $\cos x < \sin x$ pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Řešení:

4.1 $x \in \langle -10;\ 6 \rangle$

4.2 $x \in \langle 0;\ 1 \rangle$

4.3 $x \in \langle 1;\ \infty)$

4.4 $x \in \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4} \right)$

5. Posloupnosti a řady, finanční matematika

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Za posledních pět let firma zvyšovala výrobu každý rok o 10 % oproti předcházejícímu roku. *(CERMAT)*

1 **Vypočtěte, o kolik procent firma zvýšila výrobu za posledních pět let. Výsledek zaokrouhlete na celá procenta.**

Řešení: 61 %

---

2 Posloupnost je určena prvními dvěma členy $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ a rekurentním vztahem $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$; $n \in \mathbf{N}$.

Jaký je šestý člen této posloupnosti?

A) 24

B) 49

C) 52

D) 58

E) 140

Řešení: D

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Čísla 1, 26 a 36 jsou tři členy konečné **aritmetické posloupnosti**. Je mezi nimi uveden první i poslední člen posloupnosti.

(CERMAT)

3

3.1 **Kolik členů by měla taková posloupnost s diferencí $d = 0{,}25$?**

A) 39

B) 140

C) 141

D) 147

E) Pro danou diferenci nejsou splněny podmínky v zadání úlohy.

3.2 Podmínkám z výchozího textu vyhovují různé aritmetické posloupnosti. Vyberme takovou posloupnost, která má největší možnou diferencí d.

Ve kterém intervalu se nachází diference d této posloupnosti?

A) $(0; 2{,}5)$

B) $\langle 2{,}5; 4)$

C) $\langle 4; 5{,}5)$

D) $\langle 5{,}5; 7)$

E) Do žádného z uvedených intervalů.

Řešení:

3.1 **C**

3.2 **C**

---

4 **Pro kterou hodnotu $k \in \mathbf{R}$ platí rovnost** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k \cdot n^2 + 4n}{(2n+1)^2} = 2$?

A) 0

B) 0,5

C) 2

D) 4

E) 8

Řešení: E

5 **Která z uvedených řad <u>nemá</u> součet rovný $\frac{1}{2}$?**

A) $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$

B) $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{81}+\cdots$

C) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\cdots$

D) $\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}-\frac{3}{32}+\cdots$

E) $\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^5}+\frac{3}{2^7}+\frac{3}{2^9}+\cdots$

Řešení: C

6. Planimetrie

1 Kružnice má délku o 10 cm větší, než je obvod pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice.

Vypočtěte obsah kruhu, jehož hranici tvoří tato kružnice. Výsledek zaokrouhlete na dm^2.

Řešení: 39 dm^2 (resp. 40 dm^2 počítáno s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$)

---

2 Je dána přímka p, kružnice $k(S; r)$ a bod O, který neleží ani na přímce p ani na kružnici k ($O \notin p \cup k$).

Najděte takovou dvojici bodů $K \in k, P \in p$, aby bod O ležel ve středu úsečky KP.

Uveďte postup řešení.

Řešení:

<u>**Rozbor:**</u>
Bod K je obrazem bodu P ve středové souměrnosti S se středem O. Bod P leží na přímce p, proto jeho obraz K leží na obrazu p' přímky p v téže souměrnosti.

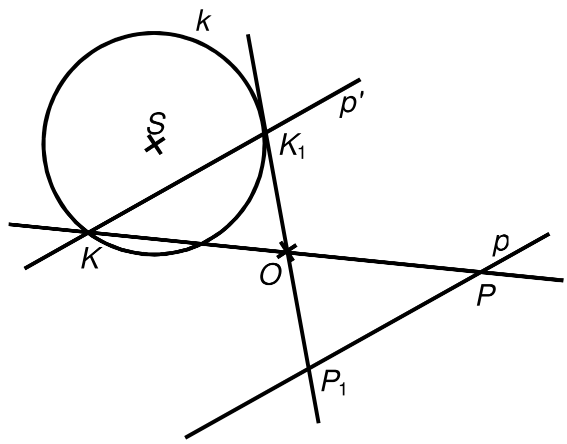
<u>Zápis konstrukce:</u>

1. $p'; \mathcal{S}(O): p \ \to p'$
2. $K; K \in k \cap p'$
3. $\leftrightarrow KO$
4. $P; P \in p \cap \leftrightarrow KO$

<u>Diskuse:</u>

a) $k \cap p' = \emptyset$ … žádné řešení
b) $k \cap p' = \{K\}$… jedno řešení
c) $k \cap p' = \{K,\ K_1\}$… dvě řešení

<u>**Náčrtek:**</u>



---

3 Velikosti vnitřních úhlů šestiúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Nejmenší úhel má velikost 70º.

Určete velikosti zbývajících vnitřních úhlů.

Řešení: 90º, 110º, 130º, 150º, 170º

4 V rovině ρ jsou umístěny dva různé body P a Q.

Přiřaďte popisu každé množiny 4.1–4.4 obraz množiny A–F.

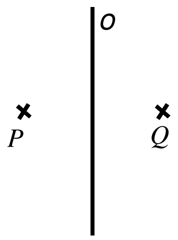
4.1 $\{X \in \rho;\ |\sphericalangle PXQ| = 90°\}$

4.2 $\{X \in \rho;\ |XP| + |XQ| = 2|PQ|\}$

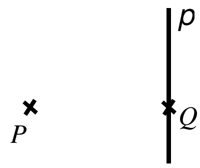
4.3 $\{X \in \rho;\ |PX|^2 - |QX|^2 = |PQ|^2\}$

4.4 $\{X \in \rho;\ |XP| - |XQ| = |PQ|\}$

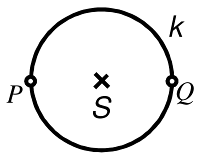
A) Osa o úsečky PQ.



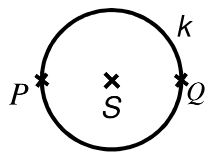
B) Přímka p kolmá k úsečce PQ procházející bodem Q.



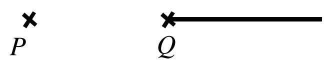
C) Kružnice k s průměrem PQ kromě bodů P a Q.



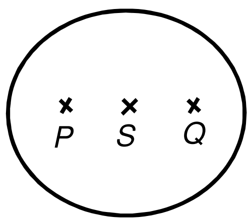
D) Kružnice k s průměrem PQ.



E) Polopřímka opačná k polopřímce QP.



F) Elipsa s ohnisky P, Q a hlavní poloosou délky $|PQ|$.



Řešení:

4.1 **C**

4.2 **F**

4.3 **B**

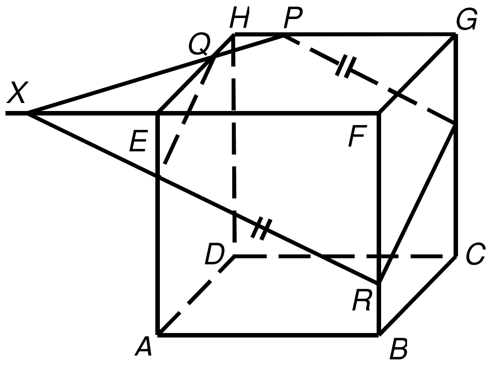
4.4 **E**

7. Stereometrie

1 V krychli $ABCDEFGH$, kde $|AB| = 6$ cm, je bod P vnitřním bodem hrany HG, bod Q vnitřním bodem hrany EH a bod R vnitřním bodem hrany BF.

Sestrojte řez krychle rovinou PQR.

Řešení:



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Pro odstraňování ropných havárií na otevřeném moři se používají speciální hmoty, které jsou schopny svým povrchem absorbovat ropu z mořské hladiny. 1 cm^2 povrchu takové hmoty je schopen absorbovat až 20 g ropy.

Z krychle této suroviny o hraně 1 m lze technologickým způsobem bez materiálových ztrát vyrobit směs kuliček o středním **průměru** 2 mm.

(CERMAT)

2 **Jaké množství kuliček lze připravit za uvedených podmínek (s přesností na desítky milionů)?**

A) 240 tisíc

B) 24 milionů

C) 120 milionů

D) 240 milionů

E) jiný počet

Řešení: D

3 **Určete počet tělesových úhlopříček v konvexním pětibokém kolmém hranolu.**

Řešení: 10

---

4 V pravidelném šestibokém hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ jsou dány následující dvojice rovin:

1) $ABC,\ D'E'F'$
2) $ABB',\ CC'F'$
3) $BDD',\ A'AE$
4) $A'F'F,\ EDD'$
5) $ACF',\ A'B'D$

V kolika případech se jedná o dvojici různoběžných rovin?

A) právě v jednom

B) právě ve dvou

C) právě ve třech

D) právě ve čtyřech

E) ve všech pěti

Řešení: B

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

V kotli tvaru polokoule o vnitřním **průměru** 86 cm je hladina vody 5 cm pod okrajem kotle.

(CERMAT)

5 **Kolik litrů vody je v kotli? Výsledek zaokrouhlete na celé litry.**

Řešení: 138 litrů

8. Analytická geometrie

1 V rovnoběžníku $ABCD$ je dán střed souměrnosti $S[2; 0]$ a vektory $\overrightarrow{AB} = (5;\ -1)$ a $\overrightarrow{AD} = (1;\ 3)$.

Který z uvedených bodů je vrcholem daného rovnoběžníku?

A) $A[-3;\ -1]$

B) $B[5;\ -1]$

C) $C[5;\ 1]$

D) $D[-1;\ 1]$

E) žádný z uvedených

Řešení: C

---

2 Jsou dány vektory $\vec{u} = (-1; 1; 2)$ a $\vec{v} = (-2; 0; 5)$.

Který vektor je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$?

A) $\vec{a} = (-5; 1; 2)$

B) $\vec{b} = (-5; -1; 2)$

C) $\vec{c} = (5; 1; 2)$

D) $\vec{d} = (-2; 1; 5)$

E) $\vec{e} = (2; -1; 5)$

Řešení: C

---

3 Kružnice se středem $S[3;\ -4]$ prochází počátkem soustavy souřadnic.

Napište obecnou rovnici dané kružnice.

Řešení: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

---

4 Řídicí přímka paraboly má rovnici $x = 2$. Ohniskem paraboly je bod $F[-4; 2]$.

Napište vrcholovou rovnici dané paraboly.

Řešení: $(y - 2)^2 = -12(x + 1)$

9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

1 Řešte rovnici $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = n^2$ **s neznámou** $n \in \mathrm{N}$.

Řešení: rovnice nemá řešení

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Do finále turnaje v žákovské kopané, v němž se utká každé družstvo s každým, se probojovala 4 družstva. Každé utkání bude trvat dvakrát 45 minut a mezi každým poločasem a každým zápasem je desetiminutová přestávka.

Organizátor turnaje musí za pronájem hřiště zaplatit, a to 200 Kč za každou započatou hodinu.

(CERMAT)

2 Určete minimální cenu, kterou organizátor musí zaplatit za pronájem hřiště.

Řešení: 2 200 Kč

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

V balíku je 24 karet, které jsou očíslovány přirozenými čísly od 1 do 24. Karty zamícháme a jednu z nich náhodně vytáhneme.

(CERMAT)

3 Určete pravděpodobnost, že číslo tažené karty je dělitelné 4 nebo 6.

Řešení: $\frac{1}{3}$

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 4

Ve škole jsou 4 třídy druhého ročníku označeny písmeny A, B, C, D. V tabulce jsou uvedeny počty žáků a průměrné známky z matematiky v těchto třídách.

Třída	Počet žáků	Průměrná známka z matematiky
A	27	2,08
B	25	2,18
C	26	2,70
D	22	2,37

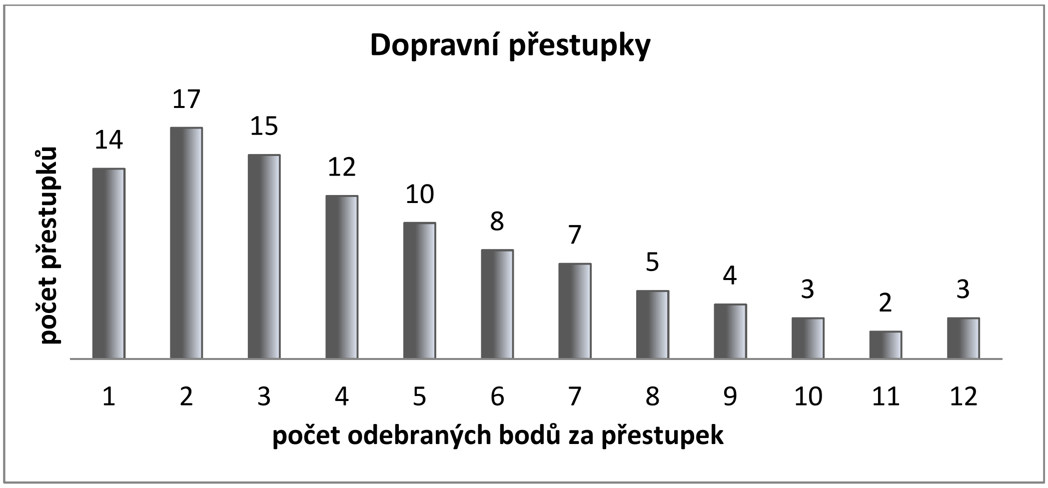
(CERMAT)

4 Vypočtěte průměrnou známku z matematiky žáka ve druhém ročníku této školy.

Řešení: 2,33

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 5

V grafu je statistika dopravních přestupků ve sledovaném období. Závažnost dopravního přestupku vyjadřuje počet odebraných bodů.



Např. bylo spácháno 10 pětibodových přestupků.

(CERMAT)

5

5.1 Určete průměrný počet bodů odebraných za jeden přestupek.

5.2 Určete, kolikrát počet odebraných bodů překročil průměrnou hodnotu.

5.3 Určete modus.

5.4 Určete medián.

5.5 Vypočtěte směrodatnou odchylku.

Řešení:

5.1 4,52 bodu

5.2 ve 42 případech

5.3 2 body

5.4 4 body

5.5 2,94 bodu